**V101: Das Trägheitsmoment**

Protokoll zum Versuch des Anfängerpraktikums für Medizinphysiker  
Technische Universität Dortmund

**Michelle Wendler & Phuong Quynh Ngo**Gruppe 4

Versuchsdatum: 29.11.2019  
Protokoll verfasst am:

**michelle.wendler@tu-dortmund.de  
phuong-quynh.ngo@tu-dortmund.de**

**1 Ziel des Versuchs**

Bei diesem Versuch soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper bestimmt werden. Zudem wird der Satz von Steiner verifiziert.

**2 Theorie**

Rotationsbewegungen werden durch das Trägheitsmoment , das Drehmoment und die Winkelbeschleunigung beschrieben . Das Trägheitsmoment beschreibt hierbei die Masseverteilung eines starren Körpers bei der Rotation um eine Achse. Das Gesamtträgheitsmoment lässt sich über die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 1 ) |

berechnen. Dabei ist ein Masseelement und der Abstand zur Drehachse. Bei einem Vergleich zur Translation stellt da

Für infinitesimale Massen gilt somit:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | ( 2 ) |

Das Trägheitsmoment für jeweils einen auf der Bodenfläche stehenden und einen liegenden Zylinder lässt sich somit über

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 3 ) |

und

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 4 ) |

berechnen, wobei der Radius und die Höhe des Zylinders beschreiben.

Bei einer Drehachse parallel zur Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers wird das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse über den Steiner’schen Satz berechnet:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | ( ) |

Dabei ist das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers, die Gesamtmasse und der Abstand der beiden Drehachsen.

Das Drehmoment , welches auf einen Körper wirkt, wenn eine Kraft im Abstand von dessen Achse auf diesen greift, wird über die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

berechnet. Stehen und senkrecht aufeinander vereinfacht sich die Formel zu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | ( ) |

Wird ein schwingungsfähiges System um einen kleinen Winkel φ ausgelenkt, wirkt dieser Auslenkung ein rücktreibendes Drehmoment durch eine Feder entgegen, womit eine harmonische Schwingung erzeugt wird. Für das rücktreibende Drehmoment gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | . | ( 8 ) |

Hierbei ist die Winkelrichtgröße eine Proportionalitätskonstante für diesen Aufbau, die das Drehmoment und den Auslenkungswinkel miteinander verknüpft. Mit den Formeln (7) und (8) lässt sie sich über die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 9 ) |

berechnen.

Die Schwingungsdauer dieses Systems beträgt

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 10 ) |

**3 Versuchsbeschreibung und -durchführung**

Um die Trägheitsmomente verschiedener Körper zu ermitteln, werden diese auf eine Drillachse gespannt. Die Winkelrichtgröße dieser Drillachse wird bestimmt, indem ein nahezu masseloser Stab auf die Drillachse gespannt wird. Der Stab, und somit auch die Drillachse, wird um einen Winkel φ ausgelenkt. Um die benötigte Kraft zu messen wird ein Kraftmesser zur Auslenkung genutzt. Dieser sollte stets in einem Winkel von 90° zum Stab gehalten werden. Es wird die Kraft für zehn Winkel gemessen.

Um das Eigenträgheitsmoment zu bestimmen werden zwei Gewichte an den eingespannten Stab gesteckt. Das System wird ebenfalls um einen Winkel φ ausgelenkt und durch loslassen zum schwingen gebracht. Es werden die Schwingungsdauern für verschiedene Abstände der Massen zur Drehachse gemessen.

Das Trägheitsmoment für jeweils einen stehenden und liegenden Zylinder wird bestimmt, indem diese auf die Drillachse gespannt werden. Die Zylinder werden dann aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und die Periodendauer gemessen. Dies wird fünf mal wiederholt.

Zuletzt wird das Trägheitsmoment einer Holzpuppe für jeweils zwei verschiedene Stellungen bestimmt. Dabei wird sie zunächst gewogen und ihre Proportionen gemessen. Anschließend wird sie über einen an ihr befestigten Stab auf die Drillachse gespannt und auf dieser einmal um 90° und einmal um 120° ausgelenkt. Die Schwingungsdauer wird für beide Auslenkungen jeweils fünf mal gemessen.

**4 Auswertung**

**4.1 Winkelrichtgröße**

Die Winkelrichtgröße wird mit Formel (9) für jeden Auslenkungswinkel φ und die dazugehörige Kraft für den Abstand berechnet. Die Ergebnisse werden dann mit Hilfe der Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 11 ) |

gemittelt.

Die Standardabweichung des Mittelwertes wird über

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 12 ) |

errechnet.

Somit ergibt sich für die Winkelrichtgröße der Wert

.

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße für den Abstand

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 20 | π/9 | 0,20 | 0,0573 |
| 40 | 2π/9 | 0,40 | 0,0573 |
| 60 | π/3 | 0,61 | 0,0583 |
| 80 | 4π/9 | 0,80 | 0,0573 |
| 90 | π/2 | 0,90 | 0,0573 |

**4.2 Eigenträgheitsmoment**

Um das Eigenträgheitsmoment zu bestimmen werden die Quadrate der Schwingungsdauern gegen die Quadrate der Abstände der beiden Massen mit aufgetragen. Der Auslenkungswinkel beträgt 90. Die beiden Zylinder haben jeweils die Höhe und den Durchmesser

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0,05 | 0,0025 | 2,86 | 8,1796 |
| 0,10 | 0,0100 | 3,80 | 14,4400 |
| 0,15 | 0,0225 | 4,81 | 23,1361 |
| 0,20 | 0,0400 | 5,96 | 35,5216 |
| 0,25 | 0,0625 | 6,96 | 48,4416 |
| 0,30 | 0,0900 | 8,50 | 72,2500 |

Zur Berechnung des Eigenträgheitsmomentes werden Formel (4) und (5) genutzt, da zunächst das Gesamtträgheitsmoment zweier liegender Zylinder berechnet wird:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 13 ) |

Formel (13) wird in Formel (9) eingesetzt und der gesamte Term wird quadriert:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

Formel (14) wird mit der allgemeinen Geradengleichung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

verglichen.

Somit ergibt sich für

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

und für

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

Die Werte für und werden mit Hilfe einer linearen Regression, welche mit Python durchgeführt und mit Excel geplottet wird, berechnet:

Somit ergibt sich über Formel (17) das Eigenträgheitsmoment zu:

.

Der Fehler wird hierbei mit der Gauß’schen Fehlerfortpflanzung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

bestimmt.

Abbildung 1: lineare Regression: Eigenträgheitsmoment

**4.3 Trägheitsmoment stehender Zylinder**

**4.3.1 Theoretische Werte**

Das Trägheitsmoment wird über Formel (3) berechnet und ergibt

.

Dabei beträgt der Durchmesser des Zylinders , die Höhe und die Masse .

**4.3.2 Experimentelle Werte**

Der Zylinder wird auf der Drillachse um einen Winkel ausgelenkt. Die gemessenen Schwingungsdauern werden mit Hilfe von Formel (11) gemittelt und die dazugehörige Standardabweichung wird mit Formel (12) berechnet :

.

Formel (9) wird quadriert und nach dem Trägheitsmoment umgestellt. Somit ergibt sich ein Trägheitsmoment von

.

Tabelle 3: Schwingungsdauer stehender Zylinder

|  |
| --- |
|  |
| 1,12 |
| 0,96 |
| 1,03 |
| 1,07 |
| 1,03 |

**4.4 Trägheitsmoment liegender Zylinder**

**4.4.1 Theoretische Werte**

Das Trägheitsmoment wird über Formel (4) berechnet und ergibt

.

Dabei beträgt der Durchmesser des Zylinders , die Höhe und die Masse .

**4.4.2 Experimentelle Werte**

Der Zylinder wird hier auf der Drillachse ebenfalls um einen Winkel ausgelenkt. Die gemessenen Schwingungsdauern werden wieder mit Hilfe von Formel (11) gemittelt und die dazugehörige Standardabweichung wird mit Formel (12) berechnet :

.

Formel (9) wird quadriert und nach dem Trägheitsmoment umgestellt. Somit ergibt sich ein Trägheitsmoment von

.

Tabelle 4: Schwingungsdauer liegender Zylinder

|  |
| --- |
|  |
| 0,69 |
| 0,83 |
| 0,83 |
| 0,84 |
| 0,84 |

**4.5 Abmessungen der Puppe**

Die Masse der Puppe beträgt . Die Durchmesser der einzelnen Körperteile werden über Formel (11) und die dazugehörige Standardabweichung über Formel (12) berechnet. Alle Körperteile werden zur Vereinfachung als Zylinder angesehen.

Tabelle 5: Abmessungen der Puppe

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 20,50 | 33,0 | 12,7 | 11,0 | 17,0 | 14,4 |
| 24,00 | 32,0 | 14,0 | 12,4 | 18,0 | 15,3 |
| 26,30 | 26,0 | 15,0 | 14,3 | 15,6 | 15,4 |
| 28,50 | 30,4 | 13,0 | 14,3 | 15,5 | 13,3 |
| 28,55 | 34,0 | 12,0 | 12,4 | 14,9 | 12,7 |

Somit betragen die Radien der einzelnen Körperteile:

.

Die Längen der einzelnen Körperteile betragen:

.

Um das Gesamtvolumen zu berechnen werden die Teilvolumina der einzelnen Körperteile berechnet und addiert.

Über die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 19 ) |

wird das Volumen der Körperteile berechnet. Für den Fehler des Gesamtvolumens und dem der einzelnen Volumina wird Formel (18) verwendet.

Die Teilvolumina und ihre Fehler lauten:

3

3

3

3

3

3 .

Somit lässt sich das Gesamtvolumen zu

3

berechnen.

Um die Masse der Einzelnen Körperteile zu bestimmen wird die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

genutzt und nach der Masse für das Körperteil umgestellt. Die jeweiligen Fehler wurden auch hier über die Gauß’sche Fehlerfortpflanzung (18) berechnet. Die Massen der jeweiligen Körperteile lauten:

.

**4.6 Trägheitsmoment Puppe, erste Körperhaltung (angelegte Arme und Beine)**

**4.6.1 Theoretische Werte**

Für die Berechnung des Gesamtträgheitsmomentes werden die Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile berechnen und addiert. Die Trägheitsmomente des Kopfes und des Rumpfes werden mit Formel (3) berechnet. Die Trägheitsmomente der Arme und Beine werden mit den Formeln (5) und (3) berechnet. Wobei hier für Formel (5) für die Beine deren Radius ist. Für die Arme gilt jeweils . Die Fehler werden mit Formel (18) berechnet.

Die einzelnen Trägheitsmomente lassen sich zu

kgm2

kgm2

kg · m2

kg · m2

kg · m2

kg · m2

berechnen.

Das Gesamte Trägheitsmoment beträgt:

.

**4.6.2 Experimentelle Werte**

Die Puppe wird jeweils um einen Winkel von und ausgelenkt. Die jeweiligen Schwingungsdauern werden über Formel (11) gemittelt und der Fehler über Formel (12) berechnet. Anschließend wird Formel (9) dazu genutzt das Trägheitsmoment zu berechnen. Der Fehler wird hierbei mit Formel (18) berechnet.

Tabelle 6: Schwingungsdauer erste Körperhaltung,

|  |
| --- |
|  |
| 0,401 |
| 0,413 |
| 0,460 |
| 0,433 |
| 0,406 |
|  |

Somit ergibt sich eine Schwingungsdauer von

und damit ein Trägheitsmoment von

.

Für einen Winkel von wird analog vorgegangen.

Tabelle 7: Schwingungsdauer erste Körperhaltung,

|  |
| --- |
|  |
| 0,407 |
| 0,410 |
| 0,401 |
| 0,395 |
| 0,404 |

Damit ergibt sich hierbei eine mittlere Schwingungsdauer von

und damit ein Trägheitsmoment von

.

**4.7 Trägheitsmoment Puppe, zweite Körperhaltung (angelegte Beine, seitlich**

**abgespreizte Arme)**

**4.7.1 Theoretische Werte**

Um das Trägheitsmoment der Puppe in der zweiten Körperhaltung zu berechnen wird analog zur Berechnung des Trägheitsmomentes in der ersten Körperhaltung vorgegangen. Die zu berechnenden Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile lassen sich, bis aus die Trägheitsmomente der Arme, aus 4.6.1 übernehmen. Die Trägheitsmomente für jeweils den Ober- und Unterarm berechnen sich nun aus Formel (4) und (5), wobei für den Oberarm und für den Unterarm gilt.

Damit ergeben sich die Trägheitsmomente für Ober- und Unterarm zu

kg · m2

kg · m2

und somit ist das Gesamtträgheitsmoment

kg · m2

**4.7.2 Experimentelle Werte**

Um das experimentelle Trägheitsmoment zu bestimmen wird wie in 4.6.2 vorgegangen. Dabei

Tabelle 8: Schwingungsdauern zweite Körperhaltung,

|  |
| --- |
|  |
| 0,64 |
| 0,60 |
| 0,56 |
| 0,64 |
| 0,72 |

ergeben sich die mittlere Schwingungsdauer und damit das Trägheitsmoment zu:

.

Für einen Winkel von ergeben sich Werte von

.

Tabelle 9: Schwingungsdauer zweite Körperhaltung,

|  |
| --- |
|  |
| 0,75 |
| 0,75 |
| 0,73 |
| 0,78 |
| 0,69 |

**6 Diskussion**

Es fällt auf, dass alle experimentellen Werte für die Trägheitsmomente größer, als die theoretischen Werte, sind. Zunächst wurde das Trägheitsmoment eines stehenden Zylinders berechnet. Bei dieser Berechnung weichen der experimentelle und der theoretische Wert um 1865,28% voneinander ab. Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes eines liegenden Zylinders ergibt sich eine Abweichung von 98,43% zwischen den beiden Werten. Für die errechneten theoretischen und experimentellen Werte des Trägheitsmomentes einer stehenden Puppe mit angewinkelten Armen ergibt sich eine Abweichung von 995,82% für die beiden Werte. Die Abweichung zwischen dem experimentellen und theoretischen Wert des Trägheitsmomentes einer stehenden Puppe mit ausgestreckten Armen beträgt in diesem Versuch 726,13%. Alle Abweichungen werden über die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( ) |

berechnet.

Die Abweichungen der experimentellen und theoretischen Werte könnten die Folge von ungenauen Messungen der Schwingungsdauern sein, da das Messen solch kurzer Schwingungsdauern sehr schwierig ist. Da das berechnete Eigenträgheitsmoment der Drillachse größer als die berechneten experimentellen Trägheitsmomente der Körper ist, wurde dies vernachlässigt. Bei einem realistischeren Wert für das Eigenträgheitsmoment hätte dieses von den Trägheitsmomenten der Körper abgezogen werden können, um näher an die theoretischen Werte zu gelangen. Es wird davon ausgegangen, dass dieser zu hohe Wert aufgrund von verfälschten Werten der einzelnen Kräfte berechnet wurde, da es recht schwierig ist den Kraftmesser bei der Auslenkung des Stabes in einem Winkel von 90° zu dem Stab zu halten. Das Messen der Massen und das Abmessen der jeweiligen Körper können ebenfalls Quellen der Fehler , die für diese Abweichungen in Frage kommen, sein.

Um weniger fehlerbehaftete Werte zu bekommen könnte man den Kraftmesser in der benötigten Position befestigen, um die Änderung des Winkels zu unterbinden. Für das Messen der Schwingungsdauern empfiehlt sich, die Stoppuhr erst nach einigen Schwingungen zu stoppen und diesen Wert dann durch die Anzahl der Schwingungen zu teilen, damit ein genaueres Ergebnis für die Schwingungsdauer erreicht werden kann.

Zu Beginn des Versuches wurde erwartet, dass das Trägheitsmoment der Puppe mit angezogenen Armen kleiner ist, als das der Puppe mit ausgestreckten Armen. Dies hat sich jeweils für die experimentellen und theoretischen Ergebnisse bestätigt.

Bild 1: Erste Köperhaltung der Puppe



Bild 2: Zweite Köperhaltung der Puppe

